Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 9

TP : Résolution numérique de l'équation de la diffusion thermique

I. Description du problème

On souhaite étudier le phénomène de diffusion thermique dans une tige homogène de longueur L et de coefficient de diffusion thermique D, dont la surface latérale est calorifugée, au cours d'une expérience de durée τ.

La température $T(x,t)$ d'un tel système évolue en suivant l'équation de la diffusion thermique à une dimension :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

à partir d'une condition initiale $T(x, t=0)$, en supposant que les conditions aux limites $T(x=0,t)$ et $T(x=L,t)$ sont imposées.

Hormis quelques situations simples, il n'existe pas de solution analytique à ce problème. Nous allons le résoudre numériquement par une méthode des différences finies sous Python.

II. Méthode des différences finies

II.1. Discrétisation de l'espace et du temps

Afin de déterminer la température $T(x,t)$ en tout point de la tige et à tout instant de l'expérience, nous allons :

- discrétiser l'espace en considérant N tronçons de longueur $\delta x = \dfrac{L}{N-1}$, ce qui défini le pas spatial ;
- discrétiser le temps en considérant M intervalles de temps $\delta t = \dfrac{\tau}{M-1}$, ce qui défini le pas temporel.

La température $T(x,t)$ sera alors approximée par une matrice `numpy` $T[i,j]$ telle que :

$$T[i,j] = T(x_i = i \times \delta x, t_j = j \times \delta t)$$

où :

- chaque ligne i correspond à l'évolution de la température au cours du temps à la position $x_i = i \times \delta x$ de la tige ;
- chaque colonne j correspond à l'évolution de la température le long de la tige à l'instant $t_j = j \times \delta t$ de l'expérience.

II.2. Approximation des dérivées par des différences finies

La méthode des différences finies consiste à approximer chaque dérivée à l'aide de développements de Taylor en prenant en compte la discrétisation.

Pour exprimer la dérivée première de la température par rapport au temps, on réalise le développement de Taylor au premier ordre :

$$T(x_i, t_j + \delta t) \approx T(x_i, t_j) + \frac{\partial T}{\partial t}\,\delta t$$

d'où :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(x_i, t_j + \delta t) - T(x_i, t_j)}{\delta t}$$

avec $T(x_i, t_j) = T[i, j]$ et $T(x_i, t_j + \delta t) = T[i, j+1]$ en prenant en compte la discrétisation, et on obtient finalement :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T[i, j+1] - T[i, j]}{\delta t}.$$

De façon équivalente, la dérivée seconde de la température par rapport à la position peut s'exprimer :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T[i+1, j] + T[i-1, j] - 2\,T[i, j]}{\delta x^2}.$$

Application :

En réalisant les développements de Taylor au second ordre de $T(x_i + \delta x, t_j)$ et $T(x_i - \delta x, t_j)$, retrouvons l'expression de la dérivée seconde de la température par rapport à la position.

On réalise les développements de Taylor au second ordre :

- $T(x_i + \delta x, t_j) \approx T(x_i, t_j) + \dfrac{\partial T}{\partial x}\,\delta x + \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,\dfrac{\delta x^2}{2}$;
- $T(x_i - \delta x, t_j) \approx T(x_i, t_j) - \dfrac{\partial T}{\partial x}\,\delta x + \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,\dfrac{\delta x^2}{2}$;

et on obtient en sommant : $T(x_i + \delta x, t_j) + T(x_i - \delta x, t_j) = 2\,T(x_i, t_j) + \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,\delta x^2$, avec :

- $T(x_i, t_j) = T[i, j]$;
- $T(x_i + \delta x, t_j) = T[i+1, j]$;
- $T(x_i - \delta x, t_j) = T[i-1, j]$;

en prenant en compte la discrétisation, et on obtient finalement : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{T[i+1, j] + T[i-1, j] - 2\,T[i, j]}{\delta x^2}$.

II.3. Schéma numérique

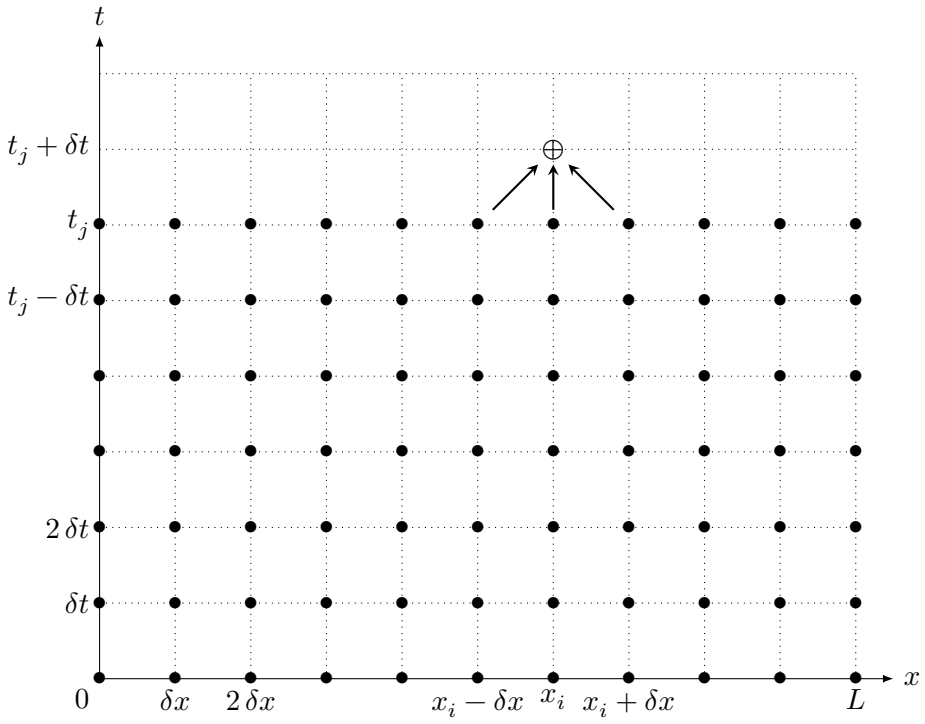
L'équation de la diffusion thermique se ramène finalement au schéma numérique suivant :

$$\frac{T[i, j+1] - T[i, j]}{\delta t} = D\,\frac{T[i+1, j] + T[i-1, j] - 2\,T[i, j]}{\delta x^2}$$

d'où la relation de récurrence :

$$T[i, j+1] = T[i, j] + \frac{D\,\delta t}{\delta x^2}\,(T[i+1, j] + T[i-1, j] - 2\,T[i, j])\,.$$

À partir de la température $T(x_i, t_j)$ de chaque tronçon de la tige à l'instant t_j, on peut alors calculer numériquement la température $T(x_i, t_j + \delta t)$ à l'instant $t_j + \delta t$. Le schéma numérique peut ainsi être visualisé de la façon suivante :



On peut montrer qu'un tel schéma numérique ne converge vers une solution stable que si ses paramètres vérifient :

$$\frac{D\,\delta t}{\delta x^2} < \frac{1}{2}.$$

Il est donc nécessaire de vérifier que cette condition soit respectée pour chaque résolution numérique.

III. Algorithme de résolution numérique

III.1. Tige de température uniforme en contact avec deux thermostats

On considère une tige de longueur $L = 1\,\text{m}$ et de coefficient de diffusion thermique $D = 1{,}2.10^{-4}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, initialement de température uniforme $T_1 = 20°\text{C}$. Son extrémité située en $x = 0$ est en contact avec un thermostat de température T_1, et son extrémité située en $x = L$ est en contact avec un thermostat de température $T_2 = 40°\text{C}$. On souhaite calculer l'évolution de la température dans la tige au cours d'une expérience de durée $\tau = 1\,\text{h}$.

Application :

En utilisant les bibliothèques `numpy as np` et `matplotlib.pyplot as plt`, écrivons un programme Python permettant de calculer l'évolution de la température dans la tige en réalisant les étapes suivantes :

- définir les valeurs des paramètres L, D et τ ;
- définir le pas spatial $\delta x = 2\,\text{cm}$ et le pas temporel $\delta t = 1\,\text{s}$ (la condition de convergence du schéma numérique est respectée avec ces paramètres) ;
- calculer le nombre de tronçons N à partir de L et δx ;
- calculer le nombre d'intervalles de temps M à partir de τ et δt ;
- créer la matrice $T[i, j]$, initialement remplie de 0, à l'aide de la fonction : `T = np.zeros((N,M))`
- remplir la première colonne $T[i, 0]$ afin de prendre en compte la condition initiale $T(x, t = 0) = T_1$;
- remplir la première ligne $T[0, j]$ afin de prendre en compte la condition à la limite $T(x = 0, t) = T_1$;
- remplir la dernière ligne $T[N-1, j]$ afin de prendre en compte la condition à la limite $T(x = L, t) = T_2$;
- pour chaque colonne j, calculer les valeurs $T[i, j + 1]$ de la colonne suivante en utilisant la relation de récurrence.

Pour visualiser l'évolution de la température dans la tige au cours de l'expérience, représentons sur une même figure :

- la température des différents tronçons en fonction de leur position pour différents instants de l'expérience (une dizaine par exemple) ;
- la température dans la tige en régime stationnaire, dont on montre facilement qu'elle s'exprime :

$$T_{\text{s}}(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}\, x + T_1.$$

On peut remarquer que le temps caractéristique de la diffusion thermique dans la tige est bien du même ordre de grandeur que $\dfrac{L^2}{D} \approx 2\,\text{h}$, comme nous l'avons montré en cours.

III.2. Tige de température non uniforme en contact avec deux thermostats

On considère une tige de longueur $L = 1\,\text{m}$ et de coefficient de diffusion thermique $D = 1{,}2.10^{-4}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, initialement de température non uniforme $T(x, t=0) = T_1 + A \sin\left(\dfrac{\pi}{L}\, x\right)$, avec $T_1 = 20°\text{C}$ et $A = 10°\text{C}$. Son extrémité située en $x = 0$ est en contact avec un thermostat de température T_1, et son extrémité située en $x = L$ est en contact avec un thermostat de température T_1. On souhaite calculer l'évolution de la température dans la tige au cours d'une expérience de durée $\tau = 1\,\text{h}$.

Application :

En utilisant les bibliothèques `math`, `numpy as np` et `matplotlib.pyplot as plt`, écrivons un programme Python permettant de représenter sur une même figure :

- la température des différents tronçons en fonction de leur position pour différents instants de l'expérience (une dizaine par exemple) ;
- la température dans la tige en régime stationnaire, dont on montre facilement qu'elle s'exprime :

$$T_{\text{s}} = T_1.$$

III.3. Tige de température uniforme en contact avec une source de température oscillante

On considère une tige de longueur $L = 1\,\text{m}$ et de coefficient de diffusion thermique $D = 1{,}2.10^{-4}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, initialement de température uniforme $T_1 = 20°\text{C}$. Son extrémité située en $x = 0$ est en contact avec un thermostat de température T_1, et son extrémité située en $x = L$ est en contact avec une source de température oscillante $T(x = L, t) = T_1 + A \sin\left(\dfrac{2\,\pi}{P}\, t\right)$, d'amplitude $A = 10°\text{C}$ et de période $P = 45\,\text{min}$. On souhaite calculer l'évolution de la température dans la tige au cours d'une expérience de durée $\tau = 1\,\text{h}$.

Application :

En utilisant les bibliothèques `math`, `numpy as np` et `matplotlib.pyplot as plt`, écrivons un programme Python permettant de représenter sur une figure la température des différents tronçons en fonction de leur position pour différents instants de l'expérience (une dizaine par exemple).